SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. Franchi

DISUGUAGLIANZE DI SOBOLEV-POINCARE' CON PESO E STIME PUNTUALI PER EQUAZIONI ELLITTICHE DEGENERI

25 Gennaio 1990

1. Sia $L = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij},\partial_j)$ un operatore ellittico (degenere) del secondo ordine a coefficienti misurabili in forma di divergenza. In questo seminario verranno esposti recenti risultati ottenuti sulla regolarità puntuale delle soluzioni deboli di $Lu = 0$ (v. [F1]). Più precisamente, proveremo che le soluzioni deboli sono hölderiane (Teor. di De Giorgi-Nash-Moser) e che le soluzioni deboli positive verificano una disuguaglianza di Harnack.

Per illustrare i risultati ottenuti, ricordiamo alcuni risultati precedenti. In [FL11], [FL2] una opportuna metrica d è associata all'operatore L così da ottenere una nuova geometria che è naturale per L come la geometria euclidea è naturale per l'operatore di Laplace (o, più precisamente, come una opportuna geometria riemmaniana è naturale per un operatore ellittico del secondo ordine). Nel caso C^∞, questa idea è contenuta in numerosi lavori: si vedano, d esempio, [FP] and [NSW]. I risultati in [FL1], [FL2] sono ottenuti per mezzo di una descrizione precisa della geometria sotto opportune ipotesi tecniche sui coefficienti il cui scopo è quello di dare una formulazione non-C^∞ della condizione di ipoellitticità di Hörmander per operatori scritti come somme di quadrati di campi vettoriali. Notiamo che la stessa idea è utilizzata in [NSW], [S], [J] e [V] per ottenere stime puntuali per operatori tipo Hormander. D'altra parte, in [FKS] è stata considerata una diversa classe di operatori ellittici degeneri: la degenerazione non è della metrica ma della

misura. Un esempio tipico di questa classe è data da $Lu = \mathrm{div}(\omega(x)\nabla u)$, dove ω è una funzione peso che appartiene alla classe A_2 di Muckenhoupt (una definizione precisa della condizione verrà data nel seguito). Risultati che si applicano sia agli operatori di [FL1] sia a quelli di [FKS] sono stati provati in [FS]. Inoltre, classi di operatori in un certo senso intermedie sono state considerate in [CW1], [CW2] e [CRS].

In questo seminario assumeremo che la forma quadratica di L sia equivalente a una forma diagonale $\omega(x) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2$, dove le λ_j sono funzioni lipschitziane nonnegative e ω è un peso A_2 rispetto alle sfere della metrica associata ai campi $\lambda_1\partial_1,\dots,\lambda_n\partial_n$. Di più, supporremo che esista una buona famiglia di curve integrali uscenti da un arbitrario punto x. Più esattamente, supporremo che, se $\xi_1,\dots,\xi_n$ sono parametri reali lontani da zero, allora la curva integrale $t \to \exp_x(\sum_j \xi_j \lambda_j \partial_j)$ non si avvicina troppo rapidamente quando $t \to 0^+$ agli iperpiani coordinati centrati in x (cioè più rapidamente degli spigoli di una famiglia di intervalli che sono equivalenti alle d-sfere). Una formulazione analitica della ipotesi è contenuta in (H.4): notiamo che questa condizione è soddisfatta nei casi considerati in [FL1], [FL2], [FS]. In un certo senso, i risultati presenti sono più vicini a quelli di [FL3], dove una disuguaglianza di Harnack non invariante è provata per un'ampia classe di operatori. E' possibile provare che, se $\omega \equiv 1$, l'ipotesi (H.4) implica che una

struttura sub-riemanniana nel senso di [FL3] è associata all'operatori. In questa nota, tuttavia, vengono ottenute stime quantitative precise sulle costanti così da ottenere una disuguaglianza di Harnack invariante e quindi la regolarità hölderiana.

In alcuni casi particolari, i nostri risultati si sovrappongono parzialmente a quelli di [CW1] e [CRS]. Inoltre, nel caso $n = 2$ e $\omega \equiv 1$, recentemente Xu [X] ha provato risultati simili. Sempre nel caso $n= 2$ e ω peso A_2, questi risultati erano già stati annunciati in [F2]. Per finire, risultati correlati sono stati ottenuti con tecniche diverse da Kusuoka e Strook (si vedano [KuS] e i lavori precedenti ivi citati).

2. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e sia L l'operatore differenziale in Ω definito da

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\,\partial_j)$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty$. Denoteremo con $A = A(x)$ la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$. Supporremo

(H.1) *esiste* $\nu \in (0,1)$ *tale che*

$$\nu\,(i)(x) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\,\xi_j^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \le \frac{1}{\nu}\,\omega(x) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\,\xi_j^2$$

per ogni $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$, *dove*

(H.2) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *sono funzioni limitate nonnegative e lipschitziane in un intorno di* $\bar{\Omega}$,

(H.3) *la distanza* d *associata ai campi vettoriali* $\lambda_1\partial_1,\dots,\partial_n\partial_n$ *nel senso di Fefferman e Phong* (v. [FP] e [FL1]) *è finita in* Ω *e la funzione* ω *è un peso* A_2 *rispetto a* d, *cioè*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \omega(y)dy \cdot \left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \frac{1}{\omega(y)}\,dy\right) \le c_{\omega,2}$$

per ogni $x \in \Omega$, $r \in (0,\rho_0]$, *dove* $B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n;\ d(x,y) < r\}$ *e* $|E|$ *è la misura di Lebesgue di* E.

Nel seguito denoteremo con $\omega(E)$ la ω-misura di E, porremo cioè

$$\omega(E) = \int_E \omega(y)dy.$$

Osserviamo che la definizione di peso A_2 rispetto a d ha senso (è possibile cioè sviluppare una teoria analoga a quella euclidea) perchè lo spazio metrico (Ω, d) con la misura di Lebesgue dx è uno spazio di tipo omogeneo, cioè perché vale la seguente proprietà di duplicazione

$$|B(x,2r)| \leq C|B(x,r)|$$

per ogni $x \in \Omega$, $r > 0$ (i pesi A_p in spazi di tipo omogeneo sono stati studiati in [C]). Questa proprietà verrà provata più avanti.

In [F2] era stata data una caratterizzazione delle sfere $B(x,r)$. Richiamiamola.

Proposizione 1. *Siano* $x \in \mathbf{R}^n$ *e* $r > 0$. *Poniamo*

$C_j(x,r) = \{u_j(t),\ 0 \leq t \leq r,$ *dove* $u = (u_1,\dots,u_n)$ *è un'arbitraria curva sub-unitaria tale che* $u(0) = x\}$.

Qui $u : [0,T] \to \Omega$ *assolutamente continua si dice sub-unitaria se*

$$< u'(t), \xi >^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 (u(t))\, \xi_j^2$$

per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$ *e per quasi ogni* $t \in [0,T]$.

Poniamo ora

$$\Lambda_k(x,r) = \sup_{s_j \in C_j(x,r)} \lambda_k(s_1,\dots,s_n),$$

$k = 1,\dots,n,$ *e*

$$Q(x,r) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - r\,\Lambda_k(x,r),\ x_k + r\,\Lambda_k(x,r)).$$

Risulta allora

$$Q(x,r) \supset B(x,r) \supset Q(x,r/b)$$

per ogni $x \in \Omega$, $r \in (0,r_0]$, *dove* b *e* r_0 *sono costanti positive assolute, dipendenti cioè solo da* n *e dalla costante di lipschitzianità* L *delle* λ_j.

Un punto cruciale della prova che sarà utilizzato implicitamente in seguito è il seguente: fissati $x \in \Omega$ e $r > 0$, possiamo rinumerare le variabili in modo tale che

$$\Lambda_{\sigma(1)}(x,r) \geq \Lambda_{\sigma(2)}(x,r) \geq \dots \geq \Lambda_{\sigma(n)}(x,r).$$

Tale rinumerazione ci indica qual è l'ordine naturale di utilizzazione dei campi $\lambda_1\partial_1,\dots,\lambda_n\,\partial_n$ per connettere x a un punto $y \in B(y,r)$ con curve integrali degli stessi campi: conviene infatti muoversi prima lungo $\lambda_{\sigma(1)}\partial_{\sigma(1)}$ poi lungo $\lambda_{\sigma(2)}\partial_{\sigma(2)}$ e così via. Naturalmente è sempre possibile in generale che la permutazione σ dipende da x e t e in ciò sta una prima difficoltà tecnica.

Possiamo ora formulare la nostra ipotesi fondamentale.

(H.4) *Per ogni* $x_0 \in \mathbf{R}_n$ *esiste un intorno* U *di* x_0 *tale che, se* $0<\varepsilon_j \le |\xi_j| \le 1$ per $j = 1,\dots,n$ *e se denotiamo con* $H(\cdot,x,\xi) = (H_1(\dots),\dots,H_n(\dots))$ *la curva integrale del campo* $\xi_1\lambda_1 + \dots + \xi_n\lambda_n\partial_n$ *uscente da* x, *risulta*

$$\int_0^t \lambda_j(H(s,x,\xi))ds \ge C_j(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\, t\, \Lambda_j(t,x),$$

per $j = 1,\dots,n$, *dove* C_j *è indipendente da* $t \in (0,t_0]$, *da* $x \in U$ *e da* $\xi^* = (|\xi_1|,\dots,|\xi_n|) \in \Delta_\varepsilon = \prod_{j=1}^{n} [\varepsilon_j,1]$.

E' possibile verificare, se $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ soddisfano le condizioni di [FL1] e [FS], l'ipotesi (H.4) è soddisfatta. Può essere significativo verificarla in un caso particolare di [FL1], dove tutte le quantità possono essere calcolate

esplicitamente. Poniamo $n = 3$, $x = 0$ e

$\lambda_1 \equiv 1$, $\lambda_2(x) = |x_1|^\alpha$, $\lambda_3(x) = |x_1|^\beta |x_2|^\gamma$,

con α, β, $\gamma \geq 1$. Risulta allora (a meno di costanti assolute)

$$\Lambda_1(0,t) \equiv 1, \quad \Lambda_2(0,t) = t^\alpha \quad , \quad \Lambda_3(0,t) = t^{\beta+(\alpha+1)\gamma}$$

e

$$H_1(t,0,\xi) = t\xi_1,$$

$$H_2(t,0,\xi) = \frac{1}{\alpha+1}\, t^{\alpha+1}\, |\xi_1|^\alpha\, \xi_2 \ ,$$

e quindi

$$\frac{\int_0^t \lambda_1(H(s,0,\xi))ds}{t\,\Lambda_1(0,t)} \equiv 1,$$

$$\frac{\int_0^t \lambda_2(H(s,0,\xi))ds}{t\,\Lambda_2(0,t)} = \frac{t^{\alpha+1}|\xi_1|^\alpha}{t^{\alpha+1}} \geq \quad \varepsilon_1^\alpha = C_2(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),$$

$$\frac{\int_0^t \lambda_3(H(s,0,\xi))ds}{t\,\Lambda_3(0,t)} = \frac{C_{\alpha,\beta,\gamma}\, t^{\beta+(\alpha+1)\gamma+1}\, |\xi_1|^{\beta+\alpha\lambda}|\xi_2|^{\lambda}}{t^{\beta+(\alpha+1)\gamma+1}}$$

$$\geq C_{\alpha,\beta,\gamma}\, |\varepsilon_1|^{\beta+\alpha\gamma}\, |\varepsilon_2|^{\gamma} = C_3(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\,.$$

Se $n = 2$, la condizione (H.4) può essere formulata in un modo molto semplice che suggerisce il significato della ipotesi anche in dimensione superiore.

Diremo che una funzione $g \geq 0$ appartiene a RH_∞ (soddisfa cioè una disuguaglianza di Hölder alla rovescio di ordine infinito) se, per ogni intervallo compatto $I \subset \mathbf{R}$ risulta

$$\int_I g(s)ds \geq c\,|I|\,\sup g.$$

Così (H.4) può essere formulata così:

(H.4') $\quad s \to \lambda_2(s,x_2)$ appartiene a RH_∞, uniformemente rispetto a x_2.

E' facile vedere che (H.4') è soddisfatta da una larga classe di funzioni lipschitziane che non hanno proprietà di monotonia come in [FL1]. Consideriamo ad esempio la funzione definita nel modo seguente: sia $\alpha > 0$; se $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$g\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = 0 \ , \ g\left(\frac{1}{2n^\alpha} + \frac{1}{2(n+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{1}{2(n+1)^\alpha}$$

e interpoliamo linearmente tra questi punti. Non è difficile verificare che g soddisfa tutte le nostre ipotesi.

Più in generale, se $n > 2$ è possibile mostrare che, se $\lambda_j(x) = \lambda_{j1}(x_1),\ldots, \lambda_{jn}(x_n)$, dove le $\lambda_{j,k}$ sono funzioni lipschitziane nonnegative appartenenti a RH_∞, allora (H.4) è verificata se $d(x,y) < \infty$ $x,y \in \Omega$.

3. Seguendo l'idea di [FL1], è possibile provare le stime puntuali per le soluzioni deboli dell'equazione $Lu = 0$ adattando la tecnica iterativa di Moser classica alla geometria generata dalle sfere $B(x,r)$. Tutto ciò è (relativamente) routine una volta provato che

Proposizione 2. *Lo spazio metrico* (Ω,d,dx) *è uno spazio di tipo omogeneo*

e

Teorema 3. (*dis. di Sobolev-Poincaré*). *Supponiamo* $w \in A_q(\Omega,d,dx)$ *e sia* $B = B(x_0,r)$ *una data sfera di raggio* $r < r_0$. *Allora, se* $p \geq q$ *esiste* $k > 1$ *tale che, se* u *è un funzione lipschitziana in un intorno di* B, *si ha*:

$$\left(\frac{1}{w(B(x_0,r))}\int_{B(x_0,r)} |u(y) - u_B|^{kp}\, w(y)\, dy\right)^{1/kp}$$

$$\leq cr\left(\frac{1}{w(B(x_0,r))}\int_{B(x_0,r)} |\nabla_\lambda u(y)|^p\, w(y)dy\right)^{1/p} ,$$

dove $\nabla_\lambda u = (\lambda_1\partial_1 u,\ldots,\lambda_n\partial_n u)$, c *e* r_0 *possono essere scelti localmente indipendenti* x_0. *La costante* c *dipende solo da* p,q,k *e dalle costanti di duplicazione. Come costante* u_B *può essere scelta la media di Lebesgue*

$$\left(u_B = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(y)dy\right)$$

o la media pesata

$$\frac{1}{w(B(x_0,r))}\int_{B(x_0,r)} u(y)w(y)dy .$$

La prova della Proposizione 2 è semplice. Poiché $H(\cdot,x,\xi)$ è (a meno di una riparametrizzazione) una curva sub-unitaria, (H.4) implica che $t \to \lambda_k(H(t,x,\xi))$ appartiene a RH_∞ per $k = 1,\ldots,n$. Dunque in particolare $\lambda_k(H(\cdot,x,\xi))$ è un peso A_p in $\mathbf{R}$ per p grande e l'asserto segue.

Dunque per provare il Teorema 3 occorre preliminarmente provare una

formula di rappresentazione per una funzione u che si annulla su una parte sufficientemente grande di una sfera $B(x_0,r)$ in termini della funzione massimale frazionaria del suo gradiente degenere $\nabla_\lambda u$ e che è (quasi) l'analogo della rappresentazione di u per mezzo dell'usuale potenziale di Riesz. A tal fine si prova che l'applicazione $\xi \to H(r,x,\xi)$ è un buon cambiamento di variabili in $\mathbf{R}^n$ e che copre una parte sufficientemente grande di un intervallo modificando $Q(x_0,r)$. Più precisamente si prova che:

Proposizione 4. *Sia* x_0 *fissato. Allora esiste un intorno* U *di* x_0 *tale che, se* $\varepsilon_i \in (0,1]$, $i = 1,\dots,n$ *e* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ *esistono* $c^*(\varepsilon)$, $t_0(\varepsilon)$ e $C > 0$ *tali che, se* $x \in U$ *e* $\varepsilon_j \le |\xi_j| \le 1$, $j = 1,\dots,n$ *e* $0<t<t_0(\varepsilon)$, *si ha:*

(i) *l'applicazione* $\xi \to H(t,x,\xi)$ *è iniettiva;*

(ii) $c|Q(x,t)| \ge \left|\det \dfrac{\partial H}{\partial \xi}(t,x,\xi)\right| \ge c^*(\varepsilon)|Q(x,t)|$

La Proposizione 4 segue abbastanza facilmente da (H.4). Il punto delicato della prova è il seguente.

Lemma 5. *Siano* x_0 *e* $\theta \in (0,1)$ *fissati. Esistono allora* $\varepsilon(\theta) > 0$,

$c(\theta) > 0$ *e* $t(\theta) > 0$ *tali che se* $t \in (0,t(\theta))$ *e* x *è vicino a* x_0 *esistono* $2n$ *costanti positive* $c_1(x,t,\theta),\dots, c_n(x,t,\theta), \varepsilon_1(x,t,\theta), \dots , \varepsilon_n(x,t,\theta)$ *tali che (posto* $F_k(x,t) = t\,\Lambda_k(x,t)$)

(i) *se* $y \in \prod_{j=1}^{n} [x_j + \theta F_j(x,c_j(x,t,\theta)t),\ x_j + F_j(x,c_j(x,t,\theta)t)]$

esiste un unico ξ *tale che* $\varepsilon_j(x,t,\theta) \le \xi_j \le 1$ per $j = 1,\dots,n$ *per cui* $H(t,x,\xi) = y_j$

(ii) $\varepsilon_j(x,t,\theta) \ge \varepsilon(\theta)$ *per* $j = 1,\dots,n$

(iii) $1 \ge c_j(x,t,\theta) \ge C(\theta)$ *per* $j = 1,\dots,n$.

Il lemma precedente dice in sostanza che, fissato $\theta \in (0,1)$ è possibile deformare il parallelepipedo $Q(x,t)$ sostituendo alle lunghezze degli spigoli $F_j(x,t)$ una lunghezza deformata $F_j(x,c_j(x,t,\theta),t)$ in modo che $H(t,x,\Delta_\varepsilon)$ contenga un sottoinsieme di misure almeno $(1-\theta)^n$ volte quella del parallelepipedo deformato. Questi parametri di deformazione dipendono in generale da x e t ma sono controllati da costanti dipendenti solo da θ((iii)). Inoltre ε non è troppo vicino a zero ((ii)). La dimostrazione viene fatta per iterazione ricavando dapprima una coordinata di ξ e poi una seconda in

funzione della prima e così via. L'ordine con cui questo viene fatto dipende dalla permutazione sugli indici delle variabili descritte nel paragrafo 2: la permutazione dipende da x e t, ma le costanti che si ottengono sono stimate indipendentemente da x e t.

Sia ora $|\{y \in B(x_o,r) ; u(y) = 0\}| \geq \beta |B(x_o,r)|$.

Scegliamo nel lemma precedente $\theta = 1 - n\sqrt{1-\beta/2}$. Sia $x \in B(x_o,r)$; posto $\Sigma = \{\xi; H(r,x,\xi) \in E\}$ risulta $|\Sigma| \geq c\beta > 0$. Allora, se $\xi \in \Sigma$

$$|u(x)| = |u(x) - u(H(r,x,\xi))| \leq \int_o^r \left|\frac{d}{dt} u(H(t,x,\xi))\right| dt \leq$$

$$\leq c \int_o^r |\nabla_\lambda u\ (H(t,x,\xi))| \, dt .$$

Integrando la disuguaglianza precedente su Σ si ottiene infine, utilizzando la Proposizione 4,

$$|u(x)| \leq C\beta r \sup_\tau \frac{1}{|B(x,\tau)|^{1-Q}} \int_{B(x,\tau)} |\nabla_\lambda u(y)| \, \chi_{B(xo,cr)}(y) \, dy ,$$

dove Q dipende dalle costanti di duplicazione di $|B(x,t)|$. Fissando ora $\beta = 1/2$ tutte le costanti rimangono fissate e, con un ragionamento standard si prova una disuguaglianza di Sobolev-Poincaré debole, nella quale cioè l'integrale a secondo membro è fatto su una sfera omotetica $B(x_o,c_or)$. Un argomento di

R.V. Kohn e D. Jerison (che utilizza solo il fatto che lo spazio metrico è di tipo omogeneo) permette però di riportarci al caso $c_0 = 1$ completando così la prova del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[C] A.P. CALDERON, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math. **57** (1976), 297-306.

[CRS] F. CHIARENZA, A. RUSTICHINI, and R. SERAPIONI, *De Giorgi-Moser Theorem for a Class of Degenerate Non-Uniformly Elliptic Equations* , Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), 635-662.

[CW1] S. CHANILLO and R. WHEEDEN, *Weighted Poincaré and Sobolev Inequalities and Estimates for the Peano Maximal Function,* Amer. J. Math. **107** (1985), 1191-1226.

[CW2] S. CHANILLO and R. WHEEDEN, *Harnack Inequality and Mean Value Inequalities for Solutions of Degenerate Elliptic Equations*, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 1111-1134.

[FKS] E. FABES, C. KENIG, and R. SERAPIONI, *The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations,* Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 77-116.

[FI] B. FRANCHI, *Weighted Sobolev-Poincaré Inequalities and Pointwise Estimates for a Class of Degenerate Elliptic Equations,* Trans. Amer. Math. Soc., in corso di stampa.

[F2] B. FRANCHI, *Equazioni ellittiche degeneri nel piano,* Seminario di Analisi Matematica del Dipartimento Matematico dell'Università di Bologna, Bologna 1987/1988.

[FL1] B. FRANCHI and E. LANCONELLI, *Hölder Regularity for a Class of Linear Non Uniformly Elliptic Operators with Measurable Coefficients,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV) **10** (1983), 523-541.

[FL2] B. FRANCHI and E. LANCONELLI, *An Embedding Theorem for Sobolev Spaces Related to Non Smooth Vector Fields and Harnack Inequality,* Comm. Partial Differential Equations **9** (1984), 1237-1264.

[FL3] B. FRANCHI and E. LANCONELLI, *Une condition geométrique pour l'inégalité de Harnack,* J. Math. Pures et Appl. **64** (1985), 237-256.

[FP1] C. FEFFERMAN and D.H. PHONG, *Subelliptic Eigenvalue Problems,* in "Conference on Harmonic Analysis" (Chicago 1981), W. Beckner et al. ed., Wadsworth 1981, 590-606.

[FS] B. FRANCHI and R. SERAPIONI, *Pointwise Estimates for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators: a Geometrical Approach,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV) **14** (1987), 527-568.

[GR] J. GARCIA CUERVA and J.L. RUBIO DE FRANCIA, "Weighted Norm Inequalities and Related Topics", North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford 1985.

[J] D. JERISON, *The Poincaré Inequality for Vector Fields Satisfying Hörmander Condition,* Duke Math. J. **53** (1986), 503-523.

[K] R.V. KOHN, *New Integral Estimates for Deformations in Terms of their Nonlinear Strains,* Arch. Rat. Mech. Anal. **78** (1982), 131-172.

[KS] D. KINDERLEHER and G. STAMPACCHA, "An Introduction to Variational Inequalities and their Applications", Academic Press, 1980.

[KuS] S. KUSUOKA and D. STROOCK, *Long Time Estimates for the Heat Kernel Associated with a Uniformly Subelliptic Symmetric Second Order Operator,* Annals of Math. **127** (1988), 165-189.

[NSW] A. NAGEL, E.M. STEIN and S. WAINGER, *Balls and Metrics Defined by Vector Fields I: Basic Properties,* Acta Math. **155** (1985) 103-147.

[S] A. SANCHEZ-CALLE, *Fundamental Solutions and Geometry of the Sum of Squares of Vector Fields,* Invent. Math. **78** (1984), 143-160.

[V] N. TH. VAROPOULOS, *Analysis on Lie Groups,* J. Funct. Anal. **76** (1988), 346-410.

[X] C.J. XU, *The Harnack's Inequality for Second Order Degenerate Elliptic Operators,* Chin. Ann. Math. **10A** (1989), 103-109 (in Chinese); engl. transl.: to appear.